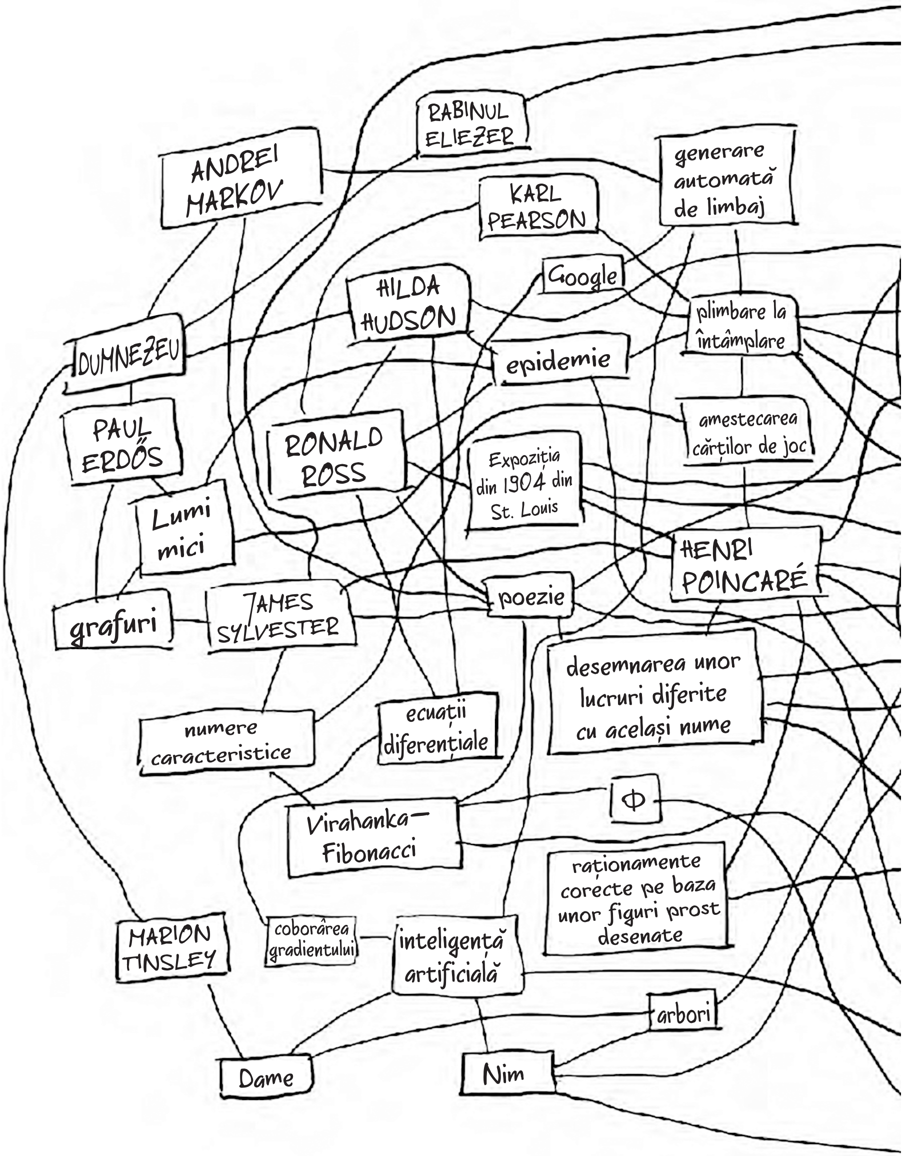
FORMA

GEOMETRIA ASCUNSĂ A INFORMAȚIEI, BIOLOGIEI, STRATEGIEI, DEMOCRAȚIEI ȘI A ORICE ALTCEVA

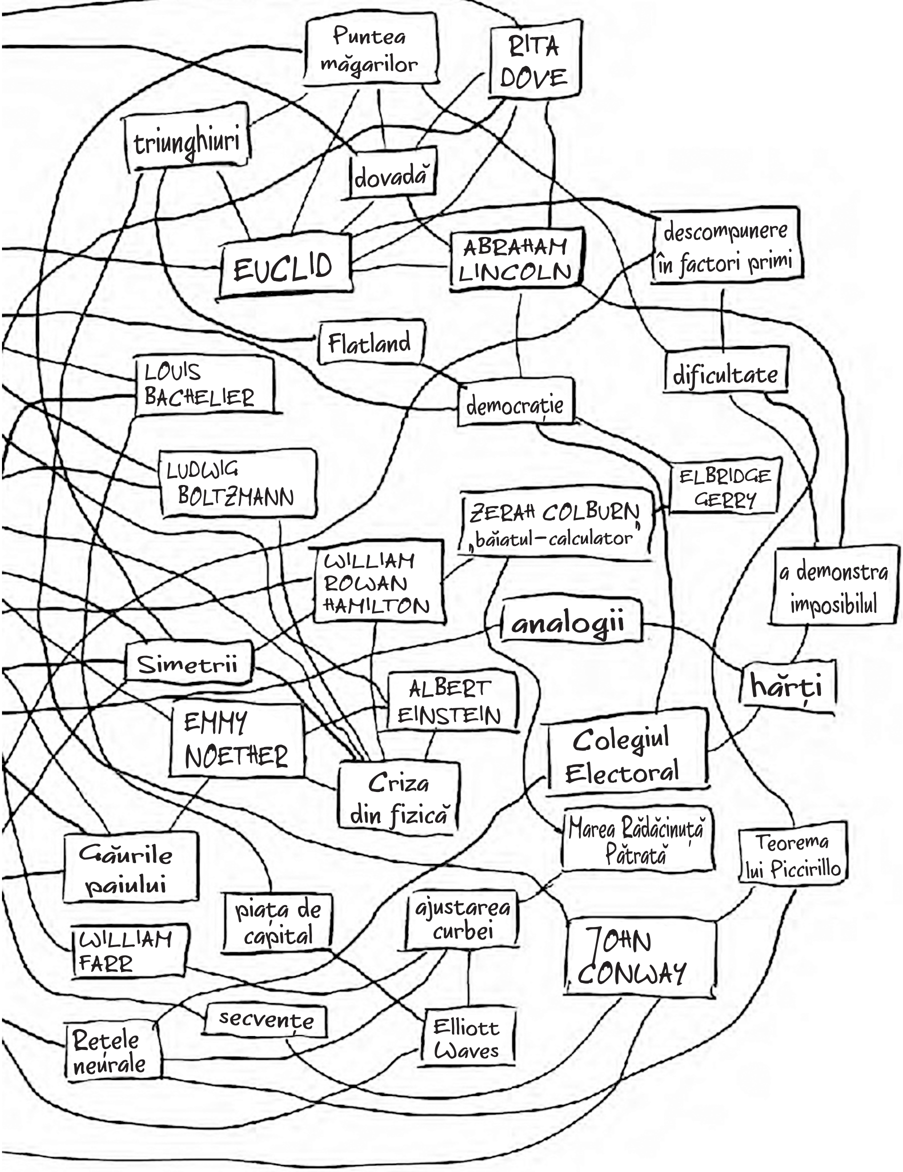
Jordan Ellenberg

Traducere din limba engleză de
Dan Bălănescu

Cuprins



RABINUL ELIEZER
ANDREI MARKOV
generare automată de limbaj
KARL PEARSON
Google
HILDA HUDSON
plimbare la întâmplare
DUMNEZEU
epidemie
PAUL ERDŐS
RONALD ROSS
amestecarea cărților de joc
Expoziția din 1904 din St. Louis
Lumi mici
HENRI POINCARÉ
grafuri
JAMES SYLVESTER
poezie
desemnarea unor lucruri diferite cu același nume
numere caracteristice
ecuații diferențiale
Φ
Virahanka-Fibonacci
raționamente corecte pe baza unor figuri prost desenate
MARION TINSLEY
coborârea gradientului
inteligență artificială
arbori
Dame
Nim


Puntea măgarilor
RITA DOVE
triunghiuri
dovadă
EUCLID
ABRAHAM LINCOLN
descompunere în factori primi
Flatland
LOUIS BACHELIER
democrație
dificultate
LUDWIG BOLTZMANN
ELBRIDGE GERRY
ZERAH COLBURN „băiatul-calculator”
WILLIAM ROWAN HAMILTON
a demonstra imposibilul
analogii
Simetrii
hărți
ALBERT EINSTEIN
EMMY NOETHER
Colegiul Electoral
Criza din fizică
Marea Rădăcinuță Pătrată
Teorema lui Piccirillo
Găurile paiului
piața de capital
ajustarea curbei
WILLIAM FARR
JOHN CONWAY
secvențe
Elliott Waves
Retele neurale

Introducere
Unde sunt lucrurile și cum arată

Sunt un matematician care vorbește în public despre matematică, iar acest lucru pare să descătușeze ceva în oameni. Îmi spun diverse lucruri. Îmi spun povești pe care simt că nu le-au spus nimănui de multă vreme, poate niciodată. Povești despre matematică. Uneori povești triste: un profesor de matematică care rănește egoul unui copil din pură răutate. Uneori povestea e mai fericită: experiența unei iluminări neașteptate care deschide brusc mintea unui copil, o experiență la care adulții ar vrea să revină, dar nu reușesc niciodată. (De fapt, și aceasta este o poveste destul de tristă.)

Adesea aceste povești sunt despre geometrie. Geometria pare să se evidențieze în amintirile din liceu ale oamenilor ca o notă discordantă zgomotoasă și ciudată dintr-un cor. Sunt oameni care o urăsc, care îmi spun că geometria constituie momentul în care matematica a încetat să mai aibă vreun sens pentru ei. Alții îmi spun că geometria a fost *singura* parte a matematicii care avea sens pentru ei. Geometria este coriandrul matematicii. Puțini sunt neutri.

Ce face geometria diferită? Cumva este primară, încorporată în noi. Din clipa în care ieșim țipând din pântece, vedem unde sunt lucrurile și cum arată. Nu sunt unul dintre acei oameni care să îți spună că tot ce este important în viața noastră interioară poate fi urmărit până la nevoile unui grup sălbatic de vânători-culegători care cutreieră savana, dar este greu să ne îndoim de faptul că acei oameni au fost nevoiți să cunoască formele, distanțele și locurile probabil înainte să aibă cuvintele în care să le exprime. Când misticii sud-americani (și imitatorii lor non-sud-americani) beau ayahuasca, ceaiul halucinogen sacru, primul lucru care se întâmplă – OK, primul lucru care se întâmplă după vomitatul incontrolabil – este percepția unei forme geometrice pure: repetarea tiparelor bidimensionale precum zăbrelele moscheilor clasice sau a viziunilor tridimensionale complete ale celulelor hexaedrice grupate în faguri pulsatori.[1] Geometria încă există când restul minții noastre raționale este îndepărtat.

Cititorule, vreau să fiu sincer cu tine în privința geometriei: la început nu mi-a păsat de ea. Ceea ce este ciudat, pentru că acum sunt matematician. Să mă ocup de geometrie este efectiv treaba mea.

Lucrurile stăteau diferit când eram un puști în concursul de matematică pe echipe. Da, era un concurs. Echipa liceului meu se numea Hell's Angles* și mergeam la fiecare întâlnire în tricouri negre asortate cu un casetofon care cânta „Hip to Be Square" al lui Huey Lewis și The News. Iar în acel concurs eram faimos printre colegi pentru că mă eschivam ori de câte ori mi se cerea să „demonstrez că unghiul APQ este congruent cu unghiul CDF" sau ceva asemănător. Nu era vorba că nu rezolvam acele probleme! Dar o făceam în cel mai alambicat mod posibil, ceea ce însemna că alocam coordonate numerice fiecăruia dintre numeroasele puncte ale diagramei, iar apoi produceam mecanic pagini întregi de algebră și calcule numerice pentru a obține suprafețele triunghiurilor și lungimile segmentelor liniare. Orice pentru a evita să fac efectiv geometrie prin metoda convențională. Uneori rezolvam corect problema, alteori o greșeam. Dar de fiecare dată era urât.

Dacă este posibil să fii natural la geometrie, eu sunt opusul. Poți da unui bebeluș un test de geometrie.[2] Îi prezinți o serie de perechi de poze; de cele mai multe ori cele două poze au aceeași formă, dar a treia sau a patra oară forma din dreapta este întoarsă. Bebelușii petrec mai mult timp uitându-se la formele răsturnate. Știu că *ceva* se întâmplă și mințile lor căutătoare de noutăți se străduiesc să descopere ce anume. Iar bebelușii care petrec mai mult timp uitându-se lung la formele în oglindă au tendința să obțină, la grădiniță, scoruri mai bune la matematică sau la testele de raționare spațială. Sunt mai rapizi și mai preciși în vizualizarea formelor și a modului în care ar arăta dacă le-ar roti sau

* Unghiurile Iadului (n.t.).

le-ar lipi. Eu? Îmi lipsește aproape complet această aptitudine. Știți micuța imagine de pe bancomatele de la benzinării care îți arată cum să orientezi cardul când îl treci prin fantă? Imaginea aceea este complet inutilă pentru mine. Este dincolo de capacitatea mea mintală să translatez desenul acela plat într-o acțiune tridimensională. Întotdeauna trebuie să încerc fiecare dintre cele patru posibilități – banda magnetică în sus și la dreapta, banda magnetică în sus și la stânga, banda magnetică în jos și la dreapta, banda magnetică în jos și la stânga – până când aparatul acceptă să îmi citească cardul și îmi vinde niște benzină.

Și totuși impresia generală este că geometria se află în centrul a ceea ce este necesar pentru o adevărată înțelegere a lumii. Katherine Johnson, matematiciana de la NASA acum bine cunoscută ca eroină a cărții și filmului *Hidden Figures**, și-a descris succesul inițial în Divizia de Cercetare a Zborului: „Toți tipii erau licențiați în matematică; uitaseră toată geometria pe care o știuseră vreodată... Eu încă mi-o aminteam."[3]

Puterea este farmecul

William Wordsworth, în lungul și în mare parte autobiograficul poem *Preludiul*, spune o poveste oarecum neverosimilă despre o victimă a unui naufragiu aruncată pe țărmul unei insule nelocuite cu nimic altceva la ea decât un exemplar din *Elementele* lui Euclid, cartea cu principii și axiome geometrice care au lansat geometria ca disciplină oficială în urmă cu aproximativ 2 500 de ani. Mare noroc pe acel naufragiat: deși este deprimat și înfometat, se consolează parcurgând demonstrațiile lui Euclid una câte una, schițând diagramele în nisip cu un băț. Pur și simplu așa era tânărul, sensibilul și poeticul Wordsworth, a scris un Wordsworth de vârstă mijlocie! Sau, pentru a-l lăsa pe poet să vorbească:

> Puterea este farmecul
> acelor abstracțiuni pentru o minte copleșită
> De imagini și bântuită de sine.[4]

* Figuri ascunse (n.t.).

(Băutorii de ayahuasca au un câștig similar – drogul le repornește creierul și le ridică mintea deasupra labirintului torturii în care crede că s-a împotmolit.)

Lucrul cel mai ciudat legat de povestea lui Wordsworth cu naufragiul și geometria este că, practic, e adevărată. Wordsworth a împrumutat-o, cu mai multe fraze lăsate intacte, din autobiografia lui John Newton, tânăr ucenic al unui negustor de sclavi care, în 1745, s-a trezit, nu naufragiat propriu-zis, ci abandonat de șeful lui pe insula Plantain din largul Sierra Leone cu puține opțiuni și încă și mai puțin de mâncat. Insula nu era nelocuită; sclavi africani trăiau acolo cu el, iar principalul său asupritor era o femeie africană care controla fluxul mâncării: „o persoană cu o anumită importanță în țara ei natală”, a descris-o Newton, iar apoi s-a plâns, într-un eșec cu adevărat uluitor de a înțelege situația: „Această femeie (nu știu din ce motiv) m-a prejudiciat în mod ciudat încă de la început”.

Câțiva ani mai târziu, Newton aproape că moare pe mare, devine credincios, ajunge preot anglican, scrie „Amazing Grace” (care are o rețetă cu totul diferită pentru cartea pe care ar trebui să o studiezi când ești deprimat) și, în cele din urmă, renunță la comerțul cu sclavi și devine un jucător important în mișcarea de abolire a sclaviei în Imperiul Britanic. Dar, pe insula Plantain, da – avea la el o carte, ediția Isaac Barrow a lui Euclid, iar în cele mai sumbre momente se retrăgea în mângâierea ei abstractă. „Astfel mi-am înșelat adesea necazurile”, a scris el, „și aproape mi-am uitat simțămintele.”[5]

Însușirea poveștii lui Newton cu geometria din nisip nu a fost singurul flirt al lui Wordsworth cu acest subiect. Thomas De Quincey, contemporan cu Wordsworth, a scris în *Literary Reminiscences*: „Wordsworth este un mare admirator al sublimei matematici; cel puțin al geometriei superioare.[6] Secretul admirației sale pentru geometrie stă în antagonismul dintre această lume a abstracției imateriale și lumea pasiunii.” Wordsworth se descurcase[7] prost la matematică la școală, dar legase o prietenie plină de admirație reciprocă cu tânărul matematician irlandez Willian Rowan Hamilton, care, cred unii[8], l-a inspirat pe Wordsworth să adauge în *Preludiu* faimoasa descriere a lui Newton (Isaac, nu John): „O minte veșnică/ Navigând solitară straniile mări ale Gândului”.

Hamilton era fascinat de toate formele cunoașterii academice – matematică, limbi antice, poezie – încă din adolescență, dar interesul său față de matematică a fost hiperactivat de întâlnirea lui din copilărie cu Zerah Colburn, „băiatul-calculator din America”.[9] Colburn, un băiat de șase ani dintr-o familie de fermieri cu mijloace modeste din Vermont, a fost găsit într-o zi de tatăl său, Abia, stând pe jos și recitând tabla înmulțirii pe care nu i-o predase nimeni niciodată. Băiatul a dovedit că avea puteri imense de calcul mintal, ceva ce nu se mai văzuse în New England. (De asemenea, ca toți bărbații din familia sa, avea șase degete la fiecare mână și șase degete la fiecare picior). Tatăl lui Zerah l-a dus să îl cunoască diverși demnitari locali, inclusiv guvernatorul Massachusetts, Elbridge Gerry (vom reveni mai târziu la acest tip într-un context foarte diferit), care l-a sfătuit pe Abia că doar în Europa există oameni capabili să înțeleagă și să cultive aptitudinile deosebite ale băiatului. Au traversat Atlanticul în 1812, perioadă în care Zerah era când dus la școală, când expus pentru bani prin Europa. În Dublin a apărut alături de un uriaș, de un albinos și de Miss Honeywell, o femeie americană care făcea acte de dexteritate cu degetele de la picioare. Iar în 1818, ajuns la paisprezece ani, a intrat într-o competiție de calculat cu Hamilton, omologul său matematician irlandez, în care Hamilton „a ieșit onorabil, deși adversarul său a fost în general învingător”.[10] Dar Colburn nu a continuat în matematică; era interesat doar de calculul mintal. Când Colburn l-a studiat pe Euclid, i s-a părut ușor, dar „anost și lipsit de interes”. Iar când Hamilton l-a întâlnit pe Băiatul-Calculator doi ani mai târziu și l-a chestionat în legătură cu metodele sale („Îi dispăruse cu totul cel de-al șaselea deget”, și-a amintit Hamilton; Colburn și-l tăiase[11] la un chirurg londonez), a descoperit că înțelegea prea puțin[12] cauzele succesului metodelor sale aritmetice. După ce și-a abandonat educația, Colburn și-a încercat norocul pe scena londoneză, nu a reușit, s-a întors în Vermont și și-a trăit viața ca predicator.

Când Hamilton l-a cunoscut pe Wordsworth în 1827, nu avea decât 20 de ani și fusese deja numit astronomul regal al Irlandei și profesor la Universitatea din Dublin. Wordsworth avea 57 de ani. Hamilton i-a trimis o scrisoare surorii sale în care a descris întâlnirea; tânărul matematician și bătrânul poet „au făcut *o plimbare de noapte*[13] împreună un timp foarte îndelungat, *fără alți tovarăși* decât stelele și propriile gânduri și cuvinte arzătoare". După cum o sugerează stilul, Hamilton nu își abandonase cu totul ambițiile poetice. A început să-i trimită imediat poemele lui Wordsworth, care i-a răspuns cald, dar critic. La scurt timp, Hamilton a renunțat la poezie; de fapt, a făcut-o în versuri, adresându-se direct Muzei printr-un poem intitulat „Poeziei", pe care i l-a trimis lui Wordsworth. Apoi, în 1831, s-a răzgândit, marcându-și decizia prin scrierea *unui alt* poem numit „Poeziei". I l-a trimis și pe acesta lui Wordsworth. Răspunsul lui Wordsworth este un exemplu de critică clasică delicată: „Îmi trimiți mulțimi de versuri, pe care le primesc cu multă plăcere, ca noi toți; totuși mi-e teamă că această îndeletnicire te poate abate de pe drumul Științei pe care pari destinat să îl parcurgi cu multă onoare pentru tine și cu profit pentru alții".

Nu toată lumea din cercul lui Wordsworth aprecia interacțiunea dintre pasiune și rațiunea solitară stranie și rece la fel de mult ca el și Hamilton. La un dineu acasă la pictorul Benjamin Robert Haydon de la sfârșitul lui 1817, prietenul lui Wordsworth, Charles Lamb, s-a îmbătat și a început să îl tachineze pe Wordsworth insultându-l pe Newton, numindu-l pe savant „un tip care nu credea în nimic dacă nu era la fel de clar precum cele trei laturi ale unui triunghi".[14] John Keats a intrat în joc, acuzându-l pe Newton că a jefuit curcubeul de tot farmecul când a demonstrat că o prismă prezintă același efect optic. Wordsworth a râs și el, strângând din dinți, probabil, pentru a evita un scandal.

Portretul pe care De Quincey i-l face lui Wordsworth continuă prin prezentarea unei noi scene de matematică din *Preludiul*, încă nepublicat la momentul acela. Pe atunci poeziile aveau reclame de prezentare! În scena aceea, despre care De Quincey promite entuziasmat că „atinge acel *ne plus ultra* de sublim în opinia mea", Wordsworth adoarme în timp ce citește *Don Quijote* și visează că se întâlnește cu un beduin care călărește o cămilă prin deșertul pustiu. Arabul ține în mână două cărți, doar că una dintre cărți, așa cum se întâmplă în vise, nu este doar o carte, ci și o piatră greoaie, iar cealaltă carte este și o scoică strălucitoare. (După câteva pagini, însuși beduinul se dovedește a fi Don Quijote.) Cartea-scoică face profeții apocaliptice când o ții la ureche. Iar cartea-piatră? Din nou sunt *Elementele* lui Euclid, aici apărând nu ca un umil instrument de autoajutorare, ci ca un mijloc de conexiune cu cosmosul nepăsător și neschimbător: cartea „cununa sufletele cu cea mai pură legătură / a rațiunii, neperturbată de spațiu sau de timp”. Era firesc ca De Quincey să fie foarte interesat de treburile acestea psihedelice; era un fost copil-minune care consuma cu perseverență laudanum și care și-a expus viziunile amețitoare în *Confesiunile unui consumator englez de opiu*, un bestseller senzațional de la începutul secolului al XIX-lea.

Scena cu Wordsworth este tipică pentru geometria privită de la distanță. Admirativ, da, dar așa cum admirăm un gimnast olimpic, care execută sărituri și răsuciri ce par imposibile oamenilor obișnuiți. Același lucru îți inspiră cel mai faimos poem geometric din toate timpurile, sonetul „Euclid alone has looked on Beauty bare”.* Euclid** al lui Vincent Millay este un personaj unic, nepământesc, damnat la luminare printr-o scânteiere de intuiție într-o „zi divină, formidabilă”. Spre deosebire de noi ceilalți care, după cum spune Millay, *dacă avem noroc*, am putea ajunge să auzim pașii Frumuseții dispărând în grabă un coridor îndepărtat.

Nu despre această geometrie vorbește cartea aceasta. Să nu mă înțelegi greșit – ca matematician, am mult de câștigat de pe urma prestigiului geometriei. E bine când oamenii au impresia că munca pe care o faci este misterioasă, eternă, mai presus de lucrurile obișnuite. „Cum a fost ziua ta?”, „O, divină și formidabilă, ca de obicei”.

Dar, cu cât încerci mai mult să impui acel punct de vedere, cu atât împingi oamenii să privească studiul geometriei ca pe o obligație. Capătă acel miros ușor stătut a ceva ce admirăm pentru că așa trebuie. Ca opera. Iar acel tip de admirație nu este suficient pentru a susține demersul. Există o mulțime de opere noi –, dar le poți numi? Nu: auzi cuvântul „operă” și te gândești la o mezzosoprană în blănuri zbierând Puccini, probabil filmată alb-negru.

---

* Singur Euclid a privit Frumusețea goală (n.t.).

** În 1922, când Millay a scris această poezie, Euclid, de fapt, nu mai era singur; geometriile noneuclidiene, în felul lor propriu la fel de minunat de simplu, nu fuseseră doar descoperite, ci și considerate a fi, datorită lui Einstein, adevărata geometrie fundamentală a spațiului, după cum vom vedea în Capitolul 3. Mă întreb dacă Millay cunoștea aceste lucruri și și-a asumat aici un rol deliberat anacronic, dar prietenii mei specialiști în poezie mi-au spus că, probabil, nu era la curent cu ultimele noutăți din fizica matematică (n.a.).

Există multă geometrie nouă și, la fel ca opera nouă, nu este la fel de bine promovată pe cât ar putea fi. Geometria nu este Euclid și nu mai este de multă vreme. Nu este o relicvă culturală, cu miros de sală de clasă, ci o disciplină vie, care avansează acum mai repede decât a făcut-o vreodată. În capitolele următoare vom întâlni noua geometrie a răspândirii pandemiei, a dubiosului proces politic american, a inspectorilor profesioniști, a inteligenței artificiale, a limbii engleze, a finanțelor, a fizicii și chiar a poeziei. (*O mulțime* de geometri au visat în secret, la fel ca William Rowan Hamilton, să devină poeți.)

Trăim într-un extraordinar oraș geometric înfloritor, de anvergură globală. Geometria nu este dincolo de spațiu și timp, ci este aici cu noi, ascunsă în raționamentele vieții de zi cu zi. Este frumoasă? Da, dar nu goală. Geometrii văd Frumusețea cu hainele de lucru pe ea.

1 „Votez pentru Euclid"

În 1864, reverendul J.P. Gulliver din Norwich, Connecticut, și-a amintit o discuție cu Abraham Lincoln despre modul în care președintele își dobândise retorica extraordinar de persuasivă. Sursa, a spus Lincoln, fusese geometria.[1]

> În lecturile mele juridice întâlneam constant cuvântul a *demonstra*. La început m-am gândit că îi înțeleg sensul, dar curând mi-am dat seama că nu îl înțeleg... Am consultat dicționarul Webster. Acesta vorbea de „o anumită dovadă", „o dovadă dincolo de posibilitatea îndoielii", dar nu mi-am putut face o idee despre ce era acea dovadă. Credeam că multe lucruri sunt dovedite dincolo de posibilitatea îndoielii fără a recurge la un asemenea proces extraordinar de argumentare, așa cum înțelegeam eu că este „demonstrația". Am consultat toate dicționarele și cărțile de referință pe care le-am putut găsi, dar fără rezultate mai bune. La fel ai fi putut defini cuvântul *albastru* unui orb. În cele din urmă, mi-am spus, „Lincoln, nu vei putea niciodată deveni avocat dacă nu înțelegi ce înseamnă a *demonstra*"; și am plecat din Springfield, m-am dus acasă la tatăl meu până când am putut demonstra toate teoremele din cărțile lui Euclid. Atunci am descoperit ce înseamnă „a demonstra" și m-am întors la studiile mele juridice.

Gulliver a fost complet de acord, răspunzând: „Nimeni nu poate vorbi bine dacă, înainte de toate, nu este capabil să își definească sieși despre ce vorbește. Euclid, bine studiat, ar elibera lumea de jumătate din calamitățile sale, îndepărtând jumătate din prostiile care acum o amăgesc și o blestemă. Adesea m-am gândit că Euclid ar fi una dintre cele mai bune cărți de inclus în catalogul Societății Tract, dacă membrii ei ar putea convinge oamenii să o citească. Ar fi o manifestare a harului." Lincoln, ne-a spus Gulliver, a râs și a fost de acord: „Votez pentru Euclid".

Lincoln, la fel ca naufragiatul John Newton, îl folosise pe Euclid ca sursă de mângâiere în perioadele grele ale vieții sale; în anii 1850, după un singur mandat în Camera Reprezentanților, părea să își fi încheiat socotelile cu politica și își câștiga existența ca simplu avocat itinerant. Își însușise noțiunile elementare ale geometriei în slujba sa anterioară de arpentor și acum dorea să-și completeze cunoștințele. Partenerul său din avocatură, William Herndon, care adesea era nevoit să împartă patul cu Lincoln în micile hanuri de țară în care poposeau pe traseu, și-a amintit metoda de studiu a lui Lincoln; Herndon adormea, în timp ce Lincoln, cu picioarele atârnând la marginea patului, stătea până noaptea târziu cu o lumânare aprinsă, cufundat în Euclid.

Într-o dimineață, Herndon l-a găsit pe Lincoln în birou într-o stare de confuzie profundă:

> Stătea la masă, iar în fața lui erau împrăștiate o mulțime de hârtii albe, coli mari și grele, un compas, o riglă, numeroase creioane, mai multe sticluțe cu cerneală de diverse culori, o mulțime de articole de papetărie și, în general, de instrumente de scris. În mod evident se luptase cu un calcul de o anumită anvergură, întrucât în jurul lui erau împrăștiate foi acoperite cu o gamă neobișnuită de figuri geometrice. Era atât de absorbit de studiul său, încât abia dacă și-a ridicat privirile când am intrat.

Abia mai târziu în ziua aceea Lincoln s-a ridicat în sfârșit de la birou și i-a spus lui Herndon că încercase să rezolve cvadratura cercului. Adică încerca să construiască un pătrat cu aceeași suprafață ca a unui anumit cerc, unde a „construi" ceva, în adevăratul sens euclidian, înseamnă să îl desenezi pe pagină folosind doar două instrumente, o riglă și un compas. A lucrat la această problemă două zile la rând, și-a amintit Herndon, „până aproape de limita epuizării".

> Mi s-a spus că așa-numita rezolvare a cvadraturii cercului este o imposibilitate practică, dar atunci nu eram conștient de asta și mă îndoiesc că Lincoln era.[2] Întrucât încercarea lui de demonstrare a teoremei s-a sfârșit cu un eșec, noi, cei din birou, am bănuit că era mai mult sau mai puțin supărat din această cauză și de aceea am fost suficient de discreți pentru a evita referirile la acest subiect.

Rezolvarea cvadraturii cercului este o problemă foarte veche, a cărei teribilă reputație cred că Lincoln o cunoștea; „cvadratura cercului” este, de mult timp, o metaforă pentru o sarcină dificilă sau imposibilă. Dante o menționează în *Paradis*: „La fel ca geometrul care dă totul pentru a rezolva cvadratura cercului și tot nu poate găsi ideea salvatoare, *la fel* am fost și eu”.[3] În Grecia, unde a început totul, un comentariu standard exasperat când cineva face o sarcină mai grea decât este necesar este să spui: „Nu ți-am cerut să rezolvi cvadratura cercului!”

Nu există niciun *motiv* pentru care cineva ar trebui să rezolve cvadratura cercului – dificultatea și faima problemei este propria motivație. Oameni cu mentalitate de învingător au încercat să rezolve cvadratura cercului din Antichitate până în 1882, când Ferdinand von Lindemann a demonstrat că nu este posibil (și chiar atunci câțiva încăpățânați au continuat; OK, chiar și *acum*). Filosoful politic din secolul al XVII-lea, Thomas Hobbes, un om a cărui încredere în propriile capacități mintale nu este pe deplin exprimată de prefixul „supra”, a crezut că a rezolvat-o. Potrivit biografului său John Aubrey, Hobbes a descoperit geometria pe la mijlocul vieții și mai mult întâmplător:

> Aflându-se într-o bibliotecă pentru domni, *Elementele* lui Euclid era deschisă la 47 *El. Libri* 1. Citi Teorema.[4] Pentru Dumnezeu, spuse el (din când în când rostea o sudalmă energică pentru întărire), *e imposibil*! Așa că i-a citit Demonstrația, care l-a trimis înapoi la o astfel de Teoremă; pe care teoremă a citit-o. Ea l-a trimis la o alta, pe care, de asemenea, a citit-o. *Et sic deinceps**, în cele din urmă a fost demonstrativ convins de adevărul ei. Acest lucru l-a făcut să iubească geometria.

Hobbes publica permanent noi încercări și intra în mici dispute cu principalii matematicieni britanici din epocă. La un moment dat, un corespondent a arătat că una dintre soluțiile lui nu era chiar corectă, deoarece două puncte P și Q despre care el pretindea că sunt la distanțe egale erau, de fapt, la distanțe foarte puțin diferite de un al treilea punct R; 41 și, respectiv, aproximativ 41,012. Hobbes a replicat că punctele lui erau suficient de mari ca întindere pentru a acoperi o diferență atât de

* Și așa mai departe (n.t.).

mică.[5] S-a îndreptat spre mormânt încă spunându-le oamenilor că a rezolvat cvadratura cercului.*

Un comentator anonim din 1833, analizând un manual de geometrie, a descris tipica cvadratură a cercului într-un fel care îi descrie exact atât pe Hobbes, cu două secole în urmă, cât și pe patologii intelectuali care încă mai taie frunză la câini pe aici în secolul XXI:

> Tot ce știu ei despre geometrie este că există niște lucruri în ea pe care cei care au studiat-o multă vreme mărturisesc că nu le pot face.[6] Auzind că autoritatea cunoașterii stăpânește prea mult mintea oamenilor, ei propun să o contracareze prin cea a ignoranței: iar dacă s-ar întâmpla ca cineva familiarizat cu subiectul să aibă altceva mai bun de făcut decât să-i asculte pe ei dezvăluind adevăruri ascunse, acela este un bigot, un stingător al luminii adevărului ș.a.m.d.

La Lincoln găsim un caracter mai atrăgător: suficientă ambiție pentru a încerca, suficientă umilință pentru a accepta că nu a reușit.

Ceea ce Lincoln a luat de la Euclid a fost ideea că, dacă ești atent, poți ridica un edificiu de încredere și înțelegere înalt și solid prin pași deductivi riguroși, etaj cu etaj, pe o fundație de axiome de care nimeni nu s-ar putea îndoi: sau, dacă vrei, de adevăruri considerate evidente. Oricine *nu* consideră acele adevăruri evidente este exclus din discuție. Ecourile lui Euclid se aud în cel mai faimos discurs al lui Lincoln, Discursul de la Gettysburg, în care caracterizează Statele Unite drept „dedicate principiului că toții oamenii sunt creați egali". „Principiu"[7] este termenul folosit de Euclid pentru un fapt care reiese logic din axiome evidente, unul pe care, pur și simplu, nu îl poți nega în mod rațional.

Lincoln nu a fost primul american care a căutat bazele politicii democratice în termeni euclidieni; acela a fost pasionatul de matematică Thomas Jefferson. Lincoln a scris într-o scrisoare citită la o comemorare a lui Jefferson în 1859, din Boston, la care nu a putut participa:

> Sunt destul de sigur că aș putea convinge orice copil sănătos la minte că cele mai simple principii ale lui Euclid sunt adevărate; dar aș eșua complet cu

* Lunga și, sincer, hilara luptă a lui Hobbes împotriva răbdătorilor săi critici matematicieni este povestită în Capitolul 7 din *Infinitesimal* de Amir Alexander (n.a.).

cineva care ar nega definițiile și axiomele.[8] Principiile lui Jefferson sunt definițiile și axiomele societății libere.

În tinerețe, Jefferson l-a studiat pe Euclid la colegiul *William and Mary* și a prețuit foarte mult geometria ulterior.* Când era vicepreședinte, Jefferson și-a făcut timp să răspundă la scrisoarea unui student din Virginia despre propunerea sa referitoare la programa de studii academice, spunând: „Trigonometria, cel puțin, este foarte importantă pentru toată lumea, abia dacă trece o zi în care nu apelăm la ea pentru unul din obiectivele vieții obișnuite" (deși descrie o bună parte din matematicile superioare drept „un lux; un lux delicios, într-adevăr, dar pe care nu și-l permit cei care urmează profesii pentru propria subzistență").[9]

În 1812, retras din politică, Jefferson i-a scris predecesorului său la președinție, John Adams:

> Am renunțat la ziare în schimbul lui Tacitus și Tucidide, Newton și Euclid; și mă simt mult mai fericit.[10]

Aici vedem o diferență reală între cei doi președinți-geometri. Pentru Jefferson, Euclid făcea parte din educația clasică necesară unui aristocrat cultivat, la fel ca istoricii greci și romani și savanții Iluminismului. Nu același lucru era valabil pentru Lincoln, provincialul autodidact. Iată-l din nou pe reverendul Gulliver, evocându-l pe Lincoln amintindu-și copilăria:

> Îmi amintesc cum m-am dus în micul meu dormitor după ce i-am auzit pe vecini vorbind într-o seară cu tatăl meu și cum am petrecut o bună parte din noaptea aceea umblând agitat prin cameră și încercând să înțeleg semnificația exactă a unora din cuvintele lor, în opinia mea, sumbre. Nu puteam dormi, deși încercam deseori, când eram atât de bântuit de o idee până când o înțelegeam, iar când credeam că o înțeleg nu eram mulțumit până nu o repetam la nesfârșit, până când nu o formulam într-un limbaj

* Totuși „considerăm aceste adevăruri evidente" nu a fost formularea lui Jefferson; prima versiune a Declarației era „considerăm aceste adevăruri sacre și incontestabile". Ben Franklin a fost cel care a șters acele cuvinte și a scris „evidente" în locul lor, făcând documentul ceva mai puțin biblic și ceva mai euclidian.

suficient de clar, după cum credeam eu, pentru orice băiat cunoscut. Era un fel de pasiune a mea și încă o am, pentru că nici acum nu mă liniștesc când am un gând până când nu îl întorc pe toate părțile. Poate asta explică specificul discursului meu.

Aceasta nu este geometrie, dar este obiceiul mental al unui geometru. Nu accepți să lași lucrurile pe jumătate înțelese; îți clarifici gândurile și urmărești pașii lor de argumentare, la fel cum Hobbes îl urmărise uimit pe Euclid făcând-o. Acest tip de autopercepere sistematică, s-a gândit Lincoln, era singura modalitate de evitare a confuziei și ignoranței.

Pentru Lincoln, spre deosebire de Jefferson, stilul euclidian nu era ceva ce aparținea unui gentilom sau unui posesor al educației formale, pentru că Lincoln nu era nici unul, nici altul.[11] Este o cabană de lemn a minții, construită manual. Construită în mod adecvat, putea rezista oricărei provocări. Și oricine, în țara imaginată de Lincoln, putea avea una.

Formalitate înghețată

Viziunea lui Lincoln asupra geometriei pentru populația americană, la fel ca multe dintre ideile sale bune, nu a fost decât incomplet realizată. Până la mijlocul secolului al XIX-lea, geometria trecuse de la colegiu la liceu, dar cursul tipic îl folosea pe Euclid ca pe o piesă de muzeu, ale cărui demonstrații trebuiau memorate, recitate și, într-o anumită măsură, apreciate. Cum se putea *ajunge* la acele demonstrații nu se spunea. Însuși cel care făcea demonstrația aproape că dispăruse: un autor din perioada aceea a remarcat că „mulți tineri citesc șase cărți din *Elemente* înainte să fie întâmplător informați că Euclid nu este numele unei științe, ci al unui om care a scris despre ea”.[12] Paradoxul educației: ce admirăm mai mult punem într-o cutie și îl facem anost.

Ca să fiu sincer, nu sunt multe de spus despre adevăratul Euclid, pentru că nu știm multe despre adevăratul Euclid. A trăit și a lucrat în marele oraș Alexandria, în nordul Africii, cândva prin anul 300 î.H.

Atât – asta este ceea ce știm. *Elementele* sale au adunat cunoștințele de geometrie deținute de matematicienii greci în perioada aceea și au pus bazele teoriei numerelor. O bună parte a materiei era cunoscută matematicienilor înainte de Euclid, dar ce este radical nou și a fost imediat revoluționar este *organizarea* acelei mulțimi de cunoștințe. De la un mic set de axiome, care erau aproape imposibil de pus la îndoială*, a derivat pas cu pas întregul aparat de teoreme despre triunghiuri, drepte, unghiuri și cercuri. Înaintea lui Euclid – dacă a existat Euclid, și nu un grup obscur de geometri din Alexandria care scriau sub acel nume – o astfel de structură ar fi fost inimaginabilă. La urma urmei, a fost un model pentru tot ce era admirabil la gândire și cunoaștere.

Există, desigur, și un alt mod de a preda geometria, care pune accent pe inventivitate și încearcă să pună elevii în carlinga euclidiană, oferindu-le puterea de a găsi propriile definiții și a vedea ce se alege de ele. Un astfel de manual, *Inventional Geometry***, pleacă de la premisa că „adevărata educație este autoeducația". Nu te uita la constructele altora, ne sfătuiește cartea, „cel puțin nu înainte de a fi descoperit tu singur un construct" și evită anxietatea și compararea ta cu alți elevi, pentru că fiecare învață în ritmul său și ai mai multe șanse să stăpânești materialul dacă te distrezi. Cartea propriu-zisă nu este altceva decât o serie de jocuri și probleme, 446 cu totul. Unele dintre ele sunt simple: „Poți desena trei unghiuri cu două drepte? Poți desena patru unghiuri cu două drepte? Poți face mai mult de patru unghiuri cu două drepte?" Unele dintre ele, ne avertizează autorul, nu sunt de fapt rezolvabile, cu atât mai bine pentru a te pune în locul unui *adevărat* om de știință. Și unele dintre ele, ca prima, nu au deloc un „răspuns corect": „Așază un cub cu o față pe masă și cu o alta spre tine și spune ce dimensiune consideri că este grosimea, ce dimensiune lățimea și ce dimensiune lungimea".[13] În general, este acea abordare „centrată pe copil", exploratorie, pe care tradiționaliștii o iau în derâdere pe motiv că reprezintă tot ce e în neregulă cu educația de astăzi. A apărut în 1860.

---

* Cu excepția uneia, dar problema mult discutată a „axiomei paralelelor" și călătoria de 2 000 de ani spre geometria neeuclidiană pe care a inițiat-o este dezvoltată în alte lucrări și va fi doar menționată aici.

** Geometria inventivă (n.t.).

Acum câțiva ani, biblioteca de matematică a Universității din Wisconsin a intrat în posesia unui tezaur imens de vechi manuale de matematică, cărți care fuseseră folosite de elevii din Wisconsin în ultimii aproximativ 100 de ani* și, în cele din urmă, abandonate în favoarea unor modele mai noi. Privind la cărțile învechite, înțelegi că fiecare controversă din educație a fost dezbătută înainte de nenumărate ori și că orice considerăm nou și ciudat – cărți de matematică precum *Geometria inventivă* care le cer elevilor să găsească demonstrații proprii, cărți de matematică care fac problemele „relevante” legându-le de viețile de zi cu zi ale elevilor, cărți de matematică menite să promoveze cauze sociale, progresive sau nu – este vechi și a fost considerat ciudat la vremea respectivă și, fără îndoială, va fi iarăși nou și ciudat în viitor.

O notă în trecere: introducerea la *Geometria inventivă* menționează că geometria are „un loc în educația tuturor, fără a excepta femeile” – autorul cărții, William George Spencer, era unul dintre primii susținători ai coeducației. O atitudine față de femei și geometrie mai specifică secolului al XIX-lea este exprimată în (dar nu susținută de) *The Mill on the Floss***, de George Eliot***, publicată în același an ca manualul lui Spencer: „Fetele nu pot face Euclid, nu-i așa, domnule?”, îl întreabă un personaj pe învățător, dl. Stelling, care răspunde: „Au multă inteligență artificială, dar nu pot avansa în nimic”. Stelling reprezintă, într-o formă exagerată satiric, modul tradițional al pedagogiei britanice împotriva căruia se revolta Spencer: un lung marș spre memorarea maeștrilor, în care procesul lent și complex al construirii înțelegerii nu este doar neglijat, ci și respins în mod activ. „Dl. Stelling nu era omul care să înmoaie și să efemineze mintea elevului său prin simplificare și explicare”. Euclid, un fel de tonic de bărbăție, trebuia suportat sec, ca o băutură tare sau ca un duș rece ca gheața.

---

* Într-una din cărțile de aritmetică de bază, folosită ultima dată în jurul anului 1930, am găsit o mică notiță făcută cu creionul pe margine „mergi la pagina 170” – la pagina 170 era o altă instrucțiune „mergi la p. 36”, unde am găsit un nou ordin și așa mai departe până am ajuns la ultima pagină, unde am găsit scris „Ești un prost!”. Și așa am fost păcălit de un elev de zece ani de dincolo de mormânt.

** Roman tradus în limba română cu titlul *Moara de pe Floss*, Editura pentru Literatura Universală, 1964 (n.t.).

*** În acest context este relevant că „George Eliot” era un pseudonim pentru Mary Ann Evans.

Chiar în cele mai înalte sfere ale cercetării matematice, insatisfacția față de stellingisme începuse să crească. Matematicianul britanic James Joseph Sylvester, despre ale cărui geometrie și algebră (și aversiune față de lâncezeala ridicolă a comunității academice) vom vorbi mai târziu, credea că Euclid trebuie ascuns „departe de elevi", iar geometria trebuie predată în raport cu fizica, cu accent pe geometria *mișcării* care completează formele statice ale lui Euclid. „Acest interes viu pentru subiect", a scris Sylvester, „lipsește atât de mult în modelele noastre tradiționale și medievale de predare.[14] În Franța, Germania și Italia, oriunde am fost pe Continent, mintea acționează direct asupra minții într-o manieră necunoscută formalității înghețate a instituțiilor noastre academice."

Privește!

Nu le mai cerem studenților să memoreze și să recite din Euclid. La sfârșitul secolului al XIX-lea, manualele au început să includă exerciții, cerându-le studenților să își construiască propriile demonstrații ale teoremelor geometrice. În 1893, Comitetul celor Zece, o adunare educațională convocată de Charles Eliot, rectorul Universității Harvard, și însărcinată cu raționalizarea și standardizarea învățământului liceal, a codificat această schimbare. Scopul geometriei în liceu, au spus ei, era să antreneze mintea elevilor în domeniul raționării deductive stricte. Ideea aceasta a rezistat. Într-un sondaj efectuat în 1950, 500 de profesori americani de liceu au fost chestionați în legătură cu obiectivele predării geometriei: de departe cel mai popular răspuns a fost „să dezvolte obiceiul unei gândiri clare și al unei exprimări precise", votat aproape de două ori mai mult decât „să asigure cunoașterea faptelor și principiilor geometriei".[15] Cu alte cuvinte, nu suntem aici pentru a îndopa elevii cu toate lucrurile cunoscute despre triunghiuri, ci să le dezvoltăm disciplina mintală pentru a construi acele lucruri pornind de la primele principii. O școală pentru mici Lincolni.

Și care este scopul acestei discipline mintale? Poate fi faptul că, într-un anumit moment al vieții lor ulterioare, elevilor li se va cere să demonstreze, definitiv și incontestabil, că suma unghiurilor exterioare ale unui poligon este de 360 de grade?

Tot aștept să mi se întâmple acest lucru și nu mi s-a întâmplat niciodată.

Motivul esențial pentru învățarea copiilor să scrie o demonstrație nu este că lumea este plină de demonstrații. Este acela că lumea este plină de *nondemonstrații*, iar adulții trebuie să cunoască diferența. Este greu să accepți o nondemonstrație odată ce te-ai familiarizat cu lucrul autentic.

Lincoln știa diferența. Prietenul și colegul lui jurist Henry Clay Whitney și-a amintit: „De multe ori l-am văzut demascând un fals și făcând de rușine atât falsul, cât și pe autorul său”.[16] Dăm tot timpul peste nondemonstrații în haine de demonstrații și, dacă nu suntem deosebit de atenți, ne penetrează apărarea. Există indicii pe care le poți căuta. În matematică, atunci când un autor își începe fraza cu „În mod clar”, ceea ce vrea să spună este că „Acest lucru mi se pare clar și probabil ar fi trebuit să verific, dar m-am încurcat puțin și am acceptat ca doar să afirm că este clar”. Exprimarea analogă a unui expert din presă este fraza care începe cu „Desigur, suntem cu toții de acord”. Ori de câte ori vezi acest lucru, trebuie neapărat să *nu* fii sigur că toată lumea este de acord cu ce urmează. Ți se cere să tratezi ceva ca pe o axiomă și, dacă este ceva ce putem învăța din istoria geometriei, este că nu ar trebui să accepți o nouă axiomă în manualul tău înainte să își dovedească cu adevărat valoarea.

Întotdeauna fii sceptic când cineva îți spune că „pur și simplu e logic”. Dacă vorbește despre o politică economică sau o personalitate culturală al cărei comportament îl deplânge sau despre o concesie în relația voastră pe care vrea să o faci, și nu despre o congruență de triunghiuri, respectivul nu este „doar logic”, pentru că operează într-un context în care deducția logică – asta dacă se aplică – nu poate fi separată de restul elementelor. Vrea să consideri un șir de opinii exprimate în mod insistent drept demonstrație a unei teoreme. Dar, odată ce ai avut de-a face cu *clinchetul* clar al unei demonstrații cinstite, niciodată nu te vei mai lăsa înșelat de așa ceva. Spune-i adversarului tău „logic” să caute cvadratura cercului.

Ceea ce îi era specific lui Lincoln, a spus Whitney, nu era că deținea un intelect superputernic. Multe persoane din viața publică, a scris Whitney cu tristețe, sunt foarte inteligente, iar printre ele putem găsi și oameni buni, și oameni răi. Nu: ceea ce îl făcea pe Lincoln special era că „îi era moral imposibil să argumenteze în mod necinstit; nu putea face așa ceva mai mult decât să fure; în esență era același lucru pentru el să deposedeze un om de proprietatea lui prin furt sau prin raționare ilogică sau vicioasă”.[17] Ceea ce a luat Lincoln de la Euclid (sau ceea ce, deja existând la Lincoln, s-a armonizat cu ceea ce a găsit la Euclid) a fost *integritatea,* principiul că cineva nu spune ceva decât dacă a justificat, în mod cinstit, că are dreptul să îl spună. Geometria este o formă de onestitate. I-ar fi putut spune și Abe Geometrul.

Singurul aspect în care mă despart de Lincoln privește umilirea autorului falsului. Pentru că cel mai greu este să fii onest cu tine însuți și pentru demascarea propriilor noastre falsuri trebuie să alocăm cel mai mult timp și efort. Trebuie să ne chestionăm întotdeauna convingerile la fel cum am face cu un dinte care se mișcă sau, mai bine, cu un dinte de a cărui șubrezenie nu suntem siguri. Și, dacă ceva nu este solid, nu este necesară facerea de rușine, ci doar o retragere calmă pe tărâmul de care ești sigur și o reevaluare a direcției în care poți merge mai departe.

Asta, în mod ideal, este ceea ce trebuie să ne învețe geometria. Dar „formalitatea înghețată” de care s-a plâns Sylvester este departe de a fi dispărut. În practică, lecția pe care o predăm adesea copiilor la ora de geometrie este, după cum s-a exprimat Ben Orlin, scriitorul-caricaturistul-povestitorul pe teme de matematică:

> O demonstrație este o dovadă ininteligibilă a unui lucru pe care îl cunoșteai deja.[18]

Exemplul oferit de Orlin pentru o astfel de demonstrație este „teorema congruenței unghiului drept”, afirmația că oricare două unghiuri drepte sunt congruente între ele. Ce i-am putea cere unui elev de clasa a IX-a în legătură cu această afirmație? Cel mai tipic format este *demonstrația pe două coloane*, un pilon al predării geometriei de peste un secol, care ar arăta cam așa în acest caz:[19]

Unghiul 1 și unghiul 2 sunt ambele unghiuri drepte	**dat**
Mărimea unghiului 1 este de 90 de grade	**definiția unghiului drept**
Mărimea unghiului 2 este de 90 de grade	**definiția unghiului drept**
Mărimea unghiului 1 este egală cu mărimea unghiului 2	**tranzitivitatea egalității**
Unghiul 1 este congruent cu unghiul 2	**definiția congruenței**

„Tranzitivitatea egalității” este una dintre „noțiunile comune” ale lui Euclid, principii aritmetice pe care le afirmă la începutul *Elementelor* și le tratează ca anterioare chiar și axiomelor geometrice. Este principiul că două lucruri care sunt egale cu al treilea lucru sunt, prin aceasta, egale unul cu celălalt.*

Nu vreau să neg că există o anumită satisfacție în a reduce tot la astfel de pași preciși, mici. Se potrivesc atât de bine, ca niște piese de Lego! Este un sentiment pe care un profesor vrea cu adevărat să îl exprime.

Și totuși... nu este *evident* că două unghiuri drepte sunt același lucru, doar așezate pe pagină în locuri diferite și indicând direcții diferite? Într-adevăr, Euclid face din calitatea a oricare două unghiuri drepte cea de-a patra axiomă a sa, regulile de bază ale jocului considerate a fi adevărate fără o demonstrație și de la care derivă tot restul. Așadar de ce ar cere un liceu modern elevilor să demonstreze acest lucru când până și Euclid a spus „Hai, e evident”? Pentru că există multe grupuri diferite de axiome de plecare de la care putem deriva geometria plană și a proceda exact la fel ca Euclid nu mai este considerat, în general, opțiunea cea mai riguroasă sau mai benefică din punct de vedere pedagogic. David Hilbert a rescris întreaga bază de la zero în 1899, iar axiomele folosite astăzi în școlile americane datorează astăzi în general mai mult celor formulate de George Birkhoff în 1932.

* În scenariul lui Tony Kushner pentru filmul *Lincoln* al lui Steven Spielberg, Lincoln invocă acest lucru într-un moment dramatic.

Fie că este sau nu o axiomă, faptul că două unghiuri drepte sunt egale este ceva ce elevii știu pur și simplu. Nu poți învinui pe cineva că este frustrat când îi spui: „Tu *crezi* că știai asta, dar nu știai *cu adevărat* până când nu ai urmat pașii din demonstrația pe două coloane". Este cam jignitor!

O prea mare parte din orele de geometrie este dedicată demonstrării evidenței. Îmi amintesc bine un curs de topologie pe care l-am urmat în primul an de facultate. Profesorul, un cercetător în vârstă foarte distins, a petrecut două săptămâni demonstrând următorul lucru: dacă desenezi o curbă închisă într-un plan, indiferent cât de șerpuită sau ciudată ar putea fi, curba taie planul în două părți; partea din afara curbei și partea din interiorul curbei.

Ei bine, pe de o parte este dificil, după cum se dovedește, să scrii o demonstrație formală a acestui fapt, cunoscut drept Teorema Curbei Jordan.* Pe de altă parte, am petrecut două săptămâni într-o stare de iritare abia controlată. Despre *asta* era de fapt matematica? Să complici ceea ce este evident? Cititorule, mi-am pierdut concentrarea. La fel și colegii mei, printre ei mulți viitori matematicieni și oameni de știință. Doi copii care stăteau chiar în fața mea, niște elevi foarte serioși care aveau să obțină doctorate în matematică la unele din primele cinci universități, începeau să se pipăie serios ori de câte ori distinsul cercetător în vârstă se întorcea spre tablă pentru a schița încă un argument delicat despre perturbația unui poligon. Vreau să spun că nu aveau nicio jenă, ca și cum forța dorinței lor reciproce adolescentine i-ar fi aruncat în altă parte a continuumului, unde această demonstrație încă nu avea loc.

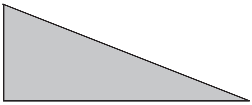
Un matematician foarte pregătit așa cum sunt eu acum ar putea spune, luând poziție într-un mod ceva mai plicticos: ei bine, tinerilor, pur și simplu nu sunteți suficient de sofisticați pentru a ști care afirmații sunt într-adevăr evidente și care ascund subtilități. Poate voi aduce în discuție sfera cu coarne a lui Alexander, care arată că întrebarea analoagă în spațiul tridimensional nu este atât de simplă pe cât ne-am putea imagina.

* Un alt Jordan.

Dar, din punct de vedere pedagogic, cred că este un răspuns foarte rău. Dacă ne ocupăm timpul la ore cu demonstrarea lucrurilor care par evidente și insistăm că acele afirmații *nu* sunt evidente, elevii vor fierbe de revoltă, la fel ca mine, sau vor găsi altceva mai interesant de făcut în timp ce profesorul nu se uită.

Îmi place felul în care profesorul emerit Ben Blum-Smith descrie problema: pentru ca studenții să simtă cu adevărat fiorul matematicii, trebuie să trăiască *gradientul încrederii* – sentimentul deplasării de la ceva evident la ceva neevident, împinși înainte de motorul logicii formale.[20] Altfel, spunem „iată o listă de axiome care par destul de evident corecte; pune-le împreună până obții o altă afirmație care pare destul de evident corectă”. Este ca și cum ai învăța pe cineva Lego arătându-i cum faci o piesă mare din două piese mici. Poți face acest lucru și uneori trebuie să faci, dar, fără îndoială, nu este obiectivul Lego.

Gradientul încrederii este, poate, mai bine experimentat decât comentat. Dacă vrei să îl *simți*, gândește-te o clipă la un triunghi dreptunghic.



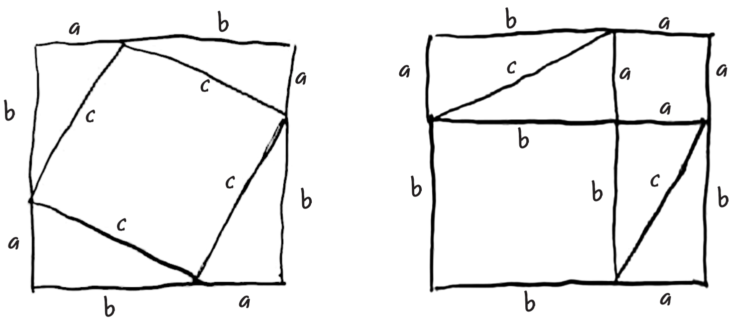
Plecăm de la o intuiție: dacă laturile verticală și orizontală sunt determinate, la fel este și latura diagonală. Dacă mergi 3 kilometri spre sud și apoi 4 kilometri spre est, ajungi la o anumită distanță de punctul de plecare; nu există nicio ambiguitate aici.

Dar care *este* distanța? Aici intervine Teorema lui Pitagora, prima teoremă reală demonstrată în geometrie. Îți spune că dacă a și b sunt laturile verticală și orizontală ale unui triunghi dreptunghic, iar c este latura diagonală, așa-numita ipotenuză, atunci

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dacă a este 3, iar b este 4, aceasta ne spune că c^2 este $3^2 + 4^2$ sau 9 + 16, sau 25. Și știm ce număr, ridicat la pătrat, dă 25; este 5. Aceasta este lungimea ipotenuzei.

De ce ar fi adevărată o astfel de formulă? Ai putea începe să urci gradientul încrederii literalmente desenând un triunghi cu laturile 3 și 4 și măsurându-i ipotenuza – ar fi într-adevăr aproape 5. Apoi desenează un triunghi cu laturile 1 și 3 și măsoară-*i* ipotenuza; dacă ești suficient de atent cu rigla, obții o lungime apropiată de 3,16... al cărei pătrat este 1 + 9 = 10. Încrederea sporită derivată din exemple nu este o dovadă. Dar aceasta este:



Pătratul mare este același în ambele desene. Dar este intersectat în două moduri diferite. În primul desen ai patru exemplare ale triunghiului nostru dreptunghic și un pătrat a cărui latură are lungimea c. În al doilea desen avem tot patru exemplare ale triunghiului, dar sunt aranjate diferit; acum din pătrat au rămas două pătrate mai mici, unul cu latura de lungime a și unul a cărui latură are lungimea b. Suprafața care rămâne după ce elimini cele patru exemplare ale triunghiului din pătratul mare trebuie să aibă aceeași mărime în ambele desene, ceea ce înseamnă că c^2 (suprafața rămasă în primul desen) trebuie să fie egală cu $a^2 + b^2$ (suprafața rămasă din al doilea).

Dacă am fi cusurgii, ne-am putea plânge că nu am *demonstrat* cu adevărat că figura din primul desen este, de fapt, un pătrat (că laturile sale au toate aceeași lungime nu este suficient; strânge unghiurile opuse ale unui pătrat între degetul mare și arătător și vei obține o formă de diamant numită *romb* care, cu siguranță, nu este pătrat, dar are toate laturile de aceeași lungime). Dar haide. Înainte să vezi desenul, nu ai niciun motiv să crezi că Teorema lui Pitagora este adevărată; după ce o